

# Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

## Übungsblatt 4

**Abgabe:** bis 24. November 2010, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.

Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

### Aufgabe 1: (18 Punkte)

Welche der folgenden Wörter gehören gemäß der Definition 3.3 zur Sprache AL? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

- |                      |   |   |
|----------------------|---|---|
| (a) $\mathbf{0}$     | (d) $(V_1 = V_2)$   | (g) $(V_1 \vee V_2) \rightarrow V_3$                                  |
| (b) $V_1$ ist wahr.  | (e) $\neg\neg V_3$  | (h) $((V_1 \rightarrow V_2) \wedge (V_1 \leftarrow V_2))$             |
| (c) $(V_1 \vee V_1)$ | (f) $(V_{42} \leftrightarrow (\mathbf{0} \wedge \mathbf{1}))$ | (i) $((V_1 \wedge V_2) \Leftrightarrow \neg(\neg V_1 \vee \neg V_2))$ |

### Aufgabe 2: (26 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Wert  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}}$  der aussagenlogischen Formel

$$\varphi := ((V_1 \vee \neg V_2) \rightarrow (\neg V_2 \wedge V_3))$$

unter der Belegung  $\mathcal{B} : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$  mit

$$\mathcal{B}(V_1) = 1, \quad \mathcal{B}(V_2) = 0, \quad \mathcal{B}(V_3) = 1$$

in nachvollziehbaren Schritten, d.h. analog zu Bsp. 3.10 aus der Vorlesung.

- (b) Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel

$$\psi := (V_3 \vee ((\neg V_1 \vee V_2) \rightarrow (\neg V_2 \wedge V_3)))$$

- (i) Beweisen Sie, dass  $\psi$  zur Menge AL gehört (gemäß Def. 3.3).
- (ii) Geben Sie  $\text{Var}(\psi)$  an.
- (iii) Geben Sie den Syntaxbaum der Formel  $\psi$  an.
- (iv) Ist die Formel erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

### Aufgabe 3:

(29 Punkte)

Das nächste Großprojekt der Deutschen Bahn ist bereits in Planung: Unter dem Namen „Frankfurt 22“ soll der Frankfurter Kopfbahnhof in einen unterirdischen Durchgangsbahnhof umgebaut werden. Die Abteilung Kundenbindung/CRM der Deutschen Bahn hat herausgefunden, dass die folgenden Zusammenhänge gelten:

- I: Die Fahrzeiten erhöhen sich genau dann, wenn der Bahnhof nicht umgebaut wird.
  - II: Die Kunden der Deutschen Bahn sind unzufrieden, wenn sich die Fahrpreise oder die Fahrzeiten erhöhen.
  - III: Der Bahnhof wird nicht umgebaut, wenn die Fahrpreise nicht erhöht werden.
- (a) Geben Sie für jeden der Zusammenhänge I, II und III eine aussagenlogische Formel an, die den jeweiligen Zusammenhang widerspiegelt (ähnlich zu Beispiel 3.16 und 3.17 im Skript). Benutzen Sie dafür die Aussagenvariablen  $Z$  (die Fahrzeiten erhöhen sich),  $B$  (der Bahnhof wird umgebaut),  $P$  (die Preise erhöhen sich) und  $K$  (die Kunden sind zufrieden).
- (b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel  $\varphi$  auf, die die Aussagenvariablen  $Z$ ,  $B$ ,  $P$  und  $K$  benutzt und die aussagt, dass alle Zusammenhänge gleichzeitig gelten.
- (c) Geben Sie für Ihre Formel  $\varphi$  aus (b) eine Belegung an, die besagt, dass der Bahnhof umgebaut wird, die Fahrzeiten und Fahrpreise sich nicht erhöhen und die Kunden zufrieden sind. Erfüllt diese Belegung die Formel  $\varphi$ ?
- (d) Welche Kombination(en) von Bahnhofsumbau, Fahrpreis- und Fahrzeiterhöhung kann die Deutsche Bahn wählen, um die Kundenzufriedenheit sicherzustellen? Überlegen Sie sich dazu anhand einer Wahrheitstafel, welche Belegung(en) die Formel  $\varphi$  aus (b) erfüllen und wie es um die Kundenzufriedenheit bei diesen Belegungen steht.

### Aufgabe 4:

(27 Punkte)

Im Folgenden wird die Syntax einer sehr einfachen Programmiersprache definiert, der so genannten WHILE-Programme. Die Menge  $L$ , die hier definiert wird, ist die Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet  $A$ , die syntaktisch korrekte WHILE-Programme sind. Hierbei ist  $A := \{\mathbf{x}, :=, +, -, \neq, ;, \mathbf{while}, \mathbf{do}, \mathbf{end}\} \cup \mathbb{N}$ , und  $L$  ist die folgendermaßen rekursiv definierte Menge:

*Basisregeln:* (B1) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j + c \in L$ .

(B2) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j - c \in L$ .

*Rekursive Regeln:* (R1) Sind  $w_1 \in L$  und  $w_2 \in L$ , so ist auch  $w_1; w_2 \in L$ .

(R2) Ist  $w \in L$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so ist  $\mathbf{while} \mathbf{x}i \neq 0 \mathbf{do} w \mathbf{end} \in L$ .

- (a) Welche der folgenden Wörter aus  $A^*$  gehören zu  $L$  und welche nicht? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
- (i)  $\mathbf{x}3 := \mathbf{x}3 - 2$
  - (ii)  $\mathbf{x}7 := 11; \mathbf{x}8 := \mathbf{x}9 + 10$
  - (iii)  $\mathbf{while} \mathbf{x}1 = 0 \mathbf{do} \mathbf{x}0 := \mathbf{x}0 + 1; \mathbf{x}1 := \mathbf{x}1 - 1 \mathbf{end}$
  - (iv)  $\mathbf{x}1 := \mathbf{x}1 + 42; \mathbf{while} \mathbf{x}1 \neq 0 \mathbf{do} \mathbf{x}1 := \mathbf{x}1 - 1 \mathbf{end}$
- (b) Für jedes Wort  $w \in A^*$  und jedes Symbol  $s \in A$  bezeichne  $|w|_s$  die Anzahl der Vorkommen des Symbols  $s$  in  $w$ . Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle Wörter  $w \in L$  gilt:  $|w|_{\mathbf{do}} = |w|_{\mathbf{end}}$ .