

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 8

Abgabe: bis 11. Juni 2014, 14:14 Uhr

Aufgabe 1:

(18 + 10 = 28 Punkte)

Die einsame Trollfestung *Trolldenburg* ist umgeben von endloser Wüste und besitzt einen unterirdischen Wasserkanal zur Wasserversorgung und Abwasserableitung. *Trolliver*, der kleinste der Trolle, hat immer mit seinem Kajak im Kanal Patrouillendienst. *Trollga*, der sonnenunempfindlichste Troll, muss die Wüste nach möglichen Gefahren absuchen. Da man sich sowohl im Kanal als auch in der Wüste leicht verirrt (im Kanal ist es so dunkel und die Wüste sieht überall gleich aus), erstellt das Oberhaupt der Trolle, *Trolligarchin Trollivera von Trollfen*, Patrouillenpläne.

Im Kanal kann *Trolliver* *vorwärts paddeln* oder sich *rückwärts treiben lassen* (abgekürzt: *v* und *r*). Sowohl beim *vorwärts paddeln* als auch beim *rückwärts treiben lassen* bewegt sich *Trolliver* gleich weit (nur in unterschiedliche Richtungen).

In der Wüste kann *Trollga* sich nach Westen, Osten, Norden und Süden bewegen (abgekürzt: *w*, *o*, *n* und *s*). Ein Buchstabe steht dabei für exakt einen Schritt in die jeweilige Richtung. (*Trollga* könnte auch in andere Richtungen gehen, aber dies hat *Trolligarchin Trollivera von Trollfen* untersagt.)

- (a) Erstellen Sie für *Trolligarchin Trollivera von Trollfen* eine kontextfreie Grammatik G_K mit dem Alphabet $\Sigma_K := \{v, r\}$, so dass $\mathcal{L}(G_K)$ exakt die Wörter aus Σ_K^* enthält, mit denen *Trolliver* wieder bei der Trollfestung *Trolldenburg* ankommt, wenn er das Wort als Reihenfolge seiner Aktionen für seine Patrouille versteht. Beachten Sie, dass der Kanal in beide Richtungen beliebig lang ist und *Trolliver* auf seiner Patrouille auch an der Trollfestung *Trolldenburg* vorbeikommen darf.
- (b) *Trolligarchin Trollivera von Trollfen* hätte auch gerne eine passende kontextfreie Grammatik G_W mit dem Alphabet $\Sigma_W := \{w, o, n, s\}$, so dass $\mathcal{L}(G_W)$ exakt die Wörter aus Σ_W^* enthält, mit denen *Trollga* wieder bei der Trollfestung *Trolldenburg* ankommt, wenn sie das Wort als Reihenfolge ihre Aktionen für ihre Patrouille versteht. Beweisen Sie, dass keine solche kontextfreie Grammatik G_W existiert.

Auf der Rückseite finden Sie weitere Aufgaben.

Aufgabe 2:**(8 + 8 + 8 = 24 Punkte)**

Bestimmen Sie für die Grammatiken G_1 , G_2 und G_3 ob diese eindeutig oder mehrdeutig sind. Ist die Grammatik mehrdeutig, dann geben Sie ein in der Grammatik ableitbares Wort inklusive zweier verschiedener Ableitungsbäume bzw. zweier verschiedener Linksableitungen für dieses Wort in der Grammatik an. Ist die Grammatik eindeutig, dann begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie außerdem möglichst einfache Umschreibungen für $\mathcal{L}(G_1)$, $\mathcal{L}(G_2)$ und $\mathcal{L}(G_3)$.

(a) $G_1 := (\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, \{S, A, B, C, D\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{c} \mid C\mathbf{b}B\mathbf{c}, \\ A &\rightarrow \mathbf{a}A\mathbf{c} \mid D, & C &\rightarrow \mathbf{a} \mid C\mathbf{a}, \\ B &\rightarrow \mathbf{b}B\mathbf{c} \mid \varepsilon, & D &\rightarrow \mathbf{b} \mid \mathbf{b}D \end{aligned}$$

(b) $G_2 := (\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \{S\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P :

$$S \rightarrow \mathbf{a}S\mathbf{b}S \mid \mathbf{b}S\mathbf{a}S \mid \varepsilon$$

(c) $G_3 := (\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \{S, A, B\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P :

$$S \rightarrow \mathbf{a}BS \mid \mathbf{b}AS \mid \varepsilon, \quad A \rightarrow \mathbf{a} \mid \mathbf{b}AA, \quad B \rightarrow \mathbf{b} \mid \mathbf{a}BB$$

Aufgabe 3:**(8 + 8 + 8 = 24 Punkte)**

Beweisen Sie, dass die Sprachen L_a , L_b und L_c nicht kontextfrei sind.

(a) $L_a := \{\mathbf{a}^i x \mathbf{b}^i x^R \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}^*\}$

(b) $L_b := \{xy \mid x, y \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \text{ mit } x = y \text{ oder } x = y^R\}$

(c) $L_c := \{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \mid |w|_c = |w|_a \cdot |w|_b\}$

Hinweise: Für Beweise mit Abschlusseigenschaften dürfen Sie voraussetzen, dass die Sprachen $L_1 := \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^m \mathbf{a}^n \mathbf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, $L_2 := \{\mathbf{a}^i \mathbf{b}^i \mathbf{c}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $L_3 := \{ww \mid w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*\}$ nicht kontextfrei sind. Außerdem dürfen Sie voraussetzen, dass die Sprache $L_4 := \{\mathbf{a}^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist. Sie dürfen alle Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen benutzen, die bisher in der Vorlesung oder vorherigen Übungsblättern bewiesen wurden.

Aufgabe 4:**(24 Punkte)**

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}, \{S, A, B, C, D\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{a} \mid DD, \\ A &\rightarrow \mathbf{a} \mid DD, & C &\rightarrow \mathbf{c} \mid BD \mid BB, \\ B &\rightarrow \mathbf{b} \mid AC \mid CA \mid CB, & D &\rightarrow \mathbf{d} \mid AB \mid BA \mid DA \end{aligned}$$

Bestimmen Sie durch Benutzung des CYK-Algorithmus ob $\mathbf{abdba} \in \mathcal{L}(G)$. Dokumentieren Sie dabei alle Zwischenschritte indem Sie alle entstehenden Mengen $V_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ und $i \leq j$ aufstellen.